

Correction Devoir maison n°5

Exercice 1 - Probabilités et suites

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 : U_1 contient 2 boules blanches et 2 boules noires et U_2 contient une boule blanche et 3 boules noires. On effectue des tirages avec remise d'une boule selon le protocole suivant :

- le premier tirage se fait dans l'urne U_1
- si le n ème tirage a donné une boule blanche (resp. noire), le $n + 1$ ème tirage s'effectue dans l'urne U_1 (resp. U_2).

On introduit les événements B_n (resp N_n) "le n ème tirage donne une boule blanche (resp. noire) " et on note $p_n = P(B_n)$.

1. Le premier tirage se fait forcément dans l'urne U_1 qui contient 2 boules blanches et deux boules noires donc

$$p_1 = \frac{1}{2}.$$

Pour le deuxième tirage, on doit savoir si l'on a tiré une boule blanche précédemment. $(B_1, \overline{B_1})$ forme un Système Complet d'évènement. D'après la formule des probabilités totales :

$$p_2 = p(B_1)P_{B_1}(B_2) + P(\overline{B_1})P_{\overline{B_1}}(B_2)$$

Or, si je tire une boule blanche au tirage 1, le deuxième tirage s'effectue dans l'urne U_1 donc

$$P_{B_1}(B_2) = \frac{1}{2}$$

Si je tire une boule noire au tirage 1, le deuxième tirage s'effectue dans l'urne U_2 donc

$$P_{\overline{B_1}}(B_2) = \frac{1}{4}$$

Ainsi,

$$p_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{3}{8}$$

Calculer p_1 puis p_2 .

2. D'après la formule des probabilités composée,

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P_{B_1}(B_2) = \frac{1}{4}$$

D'après les questions précédentes,

$$P(B_1) \times P(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{16}$$

On a $P(B_1) \times P(B_2) \neq P(B_1 \cap B_2)$.

Les événements B_1 et B_2 ne sont pas indépendants.

3. En appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'évènement $(B_n, \overline{B_n})$, on obtient

$$P(B_{n+1}) = P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1}) + P(\overline{B_n})P_{\overline{B_n}}(B_{n+1})$$

D'après les mêmes raisonnements qu'à la question 1 :

$$P_{B_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{2} \quad P_{\overline{B_n}}(B_{n+1}) = \frac{1}{4}$$

On a donc

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n \times \frac{1}{2} + (1 - p_n) \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2}p_n - \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

4. On reconnaît en $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, une suite arithmético-géométrique. On résout alors l'équation

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \iff 4x = x + 1 \\ &\iff 3x = 1 \\ &\iff x = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

On pose alors la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $v_n = p_n - \frac{1}{3}$. On a

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{4}p_n - \frac{1}{12} \\ &= \frac{1}{4} \left(p_n - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{1}{4}v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $v_1 = p_1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Donc

$$v_n = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1}$$

Ainsi,

$$p_n = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} + \frac{1}{3}$$

Exercice 2 - Dénombrement

Nous sommes en situation d'équiprobabilité. L'univers Ω contient $\binom{12}{5} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{5 \times 4 \times 3 \times 2} = 12 \times 11 \times 2 \times 3 = 792$ issues : en effet, on tire *simultanément* 5 cartes dans un jeu de 12 cartes.

1. On tire simultanément et au hasard 5 cartes de l'enveloppe.

(a) Soit A l'évènement « On n'obtient aucun roi ». Pour compter le nombre de tirages ne contenant aucun roi, on utilise une combinaison de 5 cartes parmi les 8 cartes qui ne sont pas des rois donc

$$\boxed{\text{card}(A) = \binom{8}{5} = \frac{8 \times 7 \times 6}{6} = 56.}$$

(b) Soit B l'évènement « On obtient au moins un roi ». L'évènement est complémentaire avec A . Ainsi

$$\boxed{\text{Card}(B) = \text{Card}(\Omega) - \text{Card}(A) = 792 - 56 = 736.}$$

(c) Soit C l'évènement « On obtient exactement deux rois ». Pour dénombrer cet évènement, il faut prendre en compte le tirage de 2 rois parmi les 4 possibles et le tirage de 3 cartes parmi les cartes restantes.

$$\text{Card}(C) = \binom{4}{2} \times \binom{8}{3}$$

Or

$$\binom{4}{2} = 6$$

et

$$\binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} = 56$$

Et donc

$$\boxed{\text{Card}(C) = 6 \times 70 = 336.}$$

(d) Soit D l'évènement « On obtient un carré ». On considère l'obtention d'un carré de roi. Il faut les 4 rois et 1 cartes prise au hasard parmi les 8 cartes restantes. Il y a donc 8 combinaisons possibles pour avoir un carré de roi. Comme 3 carrés sont possibles :

$$\boxed{\text{Card}(D) = 24.}$$

2. Si l'on tire successivement et sans remise 5 cartes de cet enveloppe, alors nous sommes dans une situation d'arrangements. En adaptant la réponse de la question 1(b), on a

$$\boxed{\text{card}(E) = A_5^{12} - A_5^8.}$$

Exercice 3 -Suites et sommes

1. On a :

$$- u_1 = \frac{u_0}{3} + 0 - 2 = \frac{1}{3} - 2 = -\frac{5}{3}.$$

$$- u_2 = \frac{u_1}{3} + 1 - 2 = \frac{-5/3}{3} - 1 = -\frac{5}{9} - \frac{9}{9} = -\frac{14}{9}.$$

$$- u_3 = \frac{u_2}{3} + 2 - 2 = \frac{-14/9}{3} = -\frac{14}{27}.$$

$$\boxed{\text{Conclusion : } u_1 = -\frac{5}{3}, u_2 = -\frac{14}{9} \text{ et } u_3 = -\frac{14}{27}.}$$

2. (a) Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 4$, $u_n \geq 0$.

Soit $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \geq 0$ » pour tout $n \geq 4$.

Initialisation : pour $n = 4$, on a :

$$u_4 = \frac{u_3}{3} + 3 - 2 = \frac{-14/27}{3} + 1 = \frac{-14}{81} + \frac{81}{81} = \frac{67}{81}$$

Ainsi $u_4 \geq 0$ et donc $\mathcal{P}(4)$ est vraie.

Hérédité : on suppose que la propriété est vraie à un rang $n \geq 4$, c'est-à-dire :

$$u_n \geq 0$$

On veut montrer qu'elle est vraie au rang $n + 1$, c'est-à-dire :

$$u_{n+1} \geq 0$$

On sait que $u_{n+1} = \frac{u_n}{3} + n - 2$. Or par hypothèse de récurrence, $u_n \geq 0$ d'où $\frac{u_n}{3} \geq 0$. Or $n \geq 4$ donc $n - 2 \geq 2 \geq 0$. Par somme, on a bien $u_{n+1} \geq 0$. Ainsi $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

Conclusion : la propriété est vraie au rang 4 et est héréditaire. Par principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geq 4$. Ainsi, pour tout $n \geq 4$, $u_n \geq 0$.

(b) D'après la question précédente, pour tout $n \geq 4$ on a : $u_n \geq 0$ et ainsi :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{3} + n - 2 \geq n - 2$$

Pour tout $n \geq 4$, on a donc $u_{n+1} \geq n - 2$. Changeons l'indice : posons $N = n + 1$, on a ainsi $n = N - 1$ et si $N - 1 \geq 4$ alors $u_N \geq (N - 1) - 2$. C'est-à-dire : si $N \geq 5$, $u_N \geq N - 3$. L'indice étant muet, on obtient le résultat.

Conclusion : pour tout $n \geq 5$, $u_n \geq n - 3$.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= -2u_{n+1} + 3(n+1) - \frac{21}{2} \\ &= -2\left(\frac{u_n}{3} + n - 2\right) + 3n + 3 - \frac{21}{2} \\ &= \frac{-2u_n}{3} - 2n + 4 + 3n + 3 - \frac{21}{2} \\ &= \frac{-2u_n}{3} + n + 7 - \frac{21}{2} \\ &= \frac{-2u_n}{3} + n + \frac{14}{2} - \frac{21}{2} \\ &= \frac{-2u_n}{3} + n - \frac{7}{2} \\ &= \frac{1}{3} \left(-2u_n + \frac{n}{1/3} - \frac{7/2}{1/3} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(-2u_n + 3n - \frac{21}{2} \right) \\ &= \frac{1}{3} \times v_n \end{aligned}$$

Conclusion : $(v_n)_{n \geq 0}$ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

(b) D'après la question précédente, on a pour tout $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} v_n &= v_0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= \left(-2u_0 + 3 \times 0 - \frac{21}{2}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= \left(-2 - \frac{21}{2}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= -\frac{25}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $n \geq 0$, $v_n = -\frac{25}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

(c) Soit $n \geq 0$. On sait que

$$v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$$

et ainsi :

$$-2u_n = v_n - 3n + \frac{21}{2}$$

d'où :

$$u_n = \frac{-1}{2}v_n + \frac{3n}{2} - \frac{21}{4}$$

D'après la question précédente, on a donc :

$$u_n = -\frac{1}{2} \left(-\frac{25}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) + \frac{3n}{2} - \frac{21}{4} = \frac{25}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3n}{2} - \frac{21}{4}$$

Conclusion : pour tout $n \geq 0$, $u_n = \frac{25}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3n}{2} - \frac{21}{4}$.

4. (a) $(v_n)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$. On a ainsi pour tout $n \geq 0$:

$$\sum_{k=0}^n v_k = v_0 \times \frac{1 - (1/3)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = -\frac{25}{2} \times \frac{1 - (1/3)^{n+1}}{2/3} = -\frac{25}{2} \times \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) = -\frac{75}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

Conclusion : pour tout $n \geq 0$, $\sum_{k=0}^n v_k = -\frac{75}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$.

(b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on sait d'après une question précédente que :

$$u_k = \frac{-1}{2}v_k + \frac{3k}{2} - \frac{21}{4}$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, en sommant et par linéarité, on a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n u_k &= \frac{-1}{2} \sum_{k=0}^n v_k + \frac{3}{2} \sum_{k=0}^n k - \frac{21}{4} \sum_{k=0}^n 1 \\ &= -\frac{1}{2} \left(-\frac{75}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)\right) + \frac{3}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} - \frac{21}{4}(n+1) \\ &= \frac{75}{8} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{3n(n+1) - 21(n+1)}{4} \\ &= \frac{75}{8} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{(n+1)(3n-21)}{4} \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $n \geq 0$, $\sum_{k=0}^n u_k = \frac{75}{8} \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1} \right) + \frac{(n+1)(3n-21)}{4}$.

Exercice 4 - Sommes

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $S_n = \sum_{k=0}^n (2k+1)^3$. On propose 3 méthodes de calcul de S_n .

1. Première méthode

(a) Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. En utilisant le binôme de Newton,

$$\begin{aligned} (2k+1)^3 &= (2k)^3 + 3 \times (2k)^2 + 3 \times 2k + 1 \\ &= 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 \end{aligned}$$

(b) On calcule alors

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n (2k+1)^3 \\ &= \sum_{k=0}^n 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 \\ &= 8 \sum_{k=0}^n k^3 + 12 \sum_{k=0}^n k^2 + 6 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 1 \\ &= 8 \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 + 12 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 6 \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= 2n^2(n+1)^2 + 2n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1) + (n+1) \\ &= (n+1)(2n^2(n+1) + 2n(2n+1) + 3n+1) \\ &= (n+1)(2n^3 + 2n^2 + 4n^2 + 2n + 3n + 1) \\ &= (n+1)(2n^3 + 6n^2 + 5n + 1) \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} (n+1)(2n^2 + 4n + 1) &= 2n^3 + 2n^2 + 4n^2 + 4n + n + 1 \\ &= 2n^3 + 6n^2 + 5n + 1 \end{aligned}$$

Donc

$$S_n = (n+1)^2(2n^2 + 4n + 1).$$

2. **Deuxième méthode** Montrer par récurrence $\mathcal{P}_n : \{S_n = (n+1)^2(2n^2 + 4n + 1)\}$.

- **Initialisation** : On a d'une part $S_0 = \sum_{k=0}^0 (2k+1)^3 = 1$ et $(0+1)^2(2 \times 0^2 + 4 \times 0 + 1) = 1$ donc l'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité** : On suppose que la proposition \mathcal{P}_n est vraie pour un certain rang $n \geq 0$. On a alors

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} (2k+1)^3 \\ &= S_n + (2(n+1)+1)^3 \\ &= (n+1)^2(2n^2 + 4n + 1) + (2n+3)^3 \\ &= (n^2 + 2n + 1)(2n^2 + 4n + 1) + ((2n)^3 + 3 \times (2n)^2 \times 3 + 3 \times (2n) \times 9 + 27) \\ &= 2n^4 + 4n^3 + n^2 + 4n^3 + 8n^2 + 2n + 2n^2 + 4n + 1 + 8n^3 + 36n^2 + 54n + 27 \\ &= 2n^4 + 16n^3 + 47n^2 + 60n + 28 \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
 (n+2)^2(2(n+1)^2 + 4(n+1) + 1) &= (n^2 + 4n + 4)(2n^2 + 4n + 2 + 4n + 4 + 1) \\
 &= (n^2 + 4n + 4)(2n^2 + 8n + 7) \\
 &= 2n^4 + 8n^3 + 7n^2 + 8n^3 + 32n^2 + 28n + 8n^2 + 32n + 28 \\
 &= 2n^4 + 16n^3 + 47n^2 + 60n + 28
 \end{aligned}$$

Donc la proposition \mathcal{P}_{n+1} est vraie. La suite de proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

- **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, S_n = (n+1)^2(2n^2 + 4n + 1)}$.

3. **Troisième méthode** On introduit $T_n = \sum_{k=0}^n (2k)^3$ et $U_n = \sum_{k=0}^{2n+1} k^3$.

- (a) S_n est la somme des nombres impairs de 0 à $2n+1$. T_n est la somme des nombres pairs de 0 à $2n$. Ainsi

$$\boxed{S_n + T_n = U_n}$$

- (b) On a

$$\begin{aligned}
 T_n &= \sum_{k=0}^n (2k)^3 \\
 &= \sum_{k=0}^n 8k^3 \\
 &= 8 \sum_{k=0}^n k^3 \\
 &= 8 \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 \\
 &= \boxed{2n^2(n+1)^2}
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 U_n &= \sum_{k=0}^{2n+1} k^3 \\
 &= \left(\frac{(2n+1)(2n+1+1)}{2} \right)^2 \\
 &= \left(\frac{(2n+1)(2n+2)}{2} \right)^2 \\
 &= \left(\frac{2(2n+1)(n+1)}{2} \right)^2 \\
 &= \boxed{(2n+1)^2(n+1)^2}
 \end{aligned}$$

- (c) D'après les questions précédentes,

$$\begin{aligned}
 S_n &= U_n - T_n \\
 &= (n+1)^2(2n+1)^2 - 2n^2(n+1)^2 \\
 &= (n+1)^2((2n+1)^2 - 2n^2) \\
 &= (n+1)^2(4n^2 + 4n + 1 - 2n^2) \\
 &= \boxed{(n+1)^2(2n^2 + 4n + 1)}
 \end{aligned}$$

Exercice 5 - Tournoi de Poker

Vous vous inscrivez à un tournoi de Poker no-limit Texas Hold'em amateur dans lequel 100 joueurs participent dont 25 % de filles. Au début du jeu chaque joueur reçoit le même nombre de jetons. Lorsque l'on n'a plus de jetons, on est éliminé du tournoi. Les meilleurs joueurs reçoivent un lot.

Règles du no-limit Texas Hold'em : Le jeu se joue avec un jeu de 52 cartes (4 couleurs, 13 valeurs) en plusieurs phases :

Préflop : Chaque joueur reçoit 2 cartes faces cachées. → *Tour de mise*

Flop : On met 3 cartes visibles de tous sur le board. → *Tour de mise*

Turn : On rajoute 1 carte visible de tous sur le board. → *Tour de mise*

River : On rajoute 1 carte visible de tous sur le board. → *Tour de mise*

Le but est d'avoir la meilleure combinaison de 5 cartes en prenant les 2 cartes cachées et les 5 cartes visibles sur le board. Voici les différentes combinaisons possibles de la moins forte à la plus forte :

1. **La paire** : Avoir 2 cartes de même valeur (exemple : $A\heartsuit - A\clubsuit - 4\heartsuit - 6\spadesuit - 2\clubsuit$)
 2. **La double paire** : Avoir 2 fois 2 cartes de même valeur (exemple : $A\heartsuit - A\clubsuit - 2\heartsuit - 6\spadesuit - 2\clubsuit$)
 3. **Le brelan** : Avoir 3 cartes de même valeur (exemple : $A\heartsuit - A\clubsuit - A\heartsuit - 5\spadesuit - 2\clubsuit$)
 4. **La suite** : Avoir 5 cartes qui se suivent (exemple : $6\heartsuit - 7\diamondsuit - 8\clubsuit - 9\spadesuit - 10\clubsuit$)
 5. **La couleur** : Avoir 5 cartes de la même couleur (exemple : $3\clubsuit - 6\clubsuit - 8\clubsuit - 10\clubsuit - A\clubsuit$)
 6. **Le full** : Avoir en même temps une paire et un brelan (exemple : $A\clubsuit - A\spadesuit - A\heartsuit - 5\spadesuit - 5\heartsuit$)
 7. **Le carré** : Avoir 4 cartes de même valeur (exemple : $A\heartsuit - A\clubsuit - A\heartsuit - A\spadesuit - 2\clubsuit$)
 8. **La suite couleur ou quinte flush** : Avoir 5 cartes qui se suivent et de même couleur (par exemple $6\clubsuit - 7\clubsuit - 8\clubsuit - 9\clubsuit - 10\clubsuit$)
1. **Tirage au sort de la place.** Les joueurs sont répartis sur 10 tables de 10 places. On note traditionnellement la place $t - p$ ou t est le numéro de la table et p le numéro de la place à table. Ainsi se trouver en $1 - 6$ signifie être à la table n°1, siège n°6. Le tirage au sort de la place se fait de manière équiprobable.

- (a) On tire à la fois la table puis la place. On peut représenter cette expérience à l'aide de couples (t, p) où t est le numéro de la table et p le numéro de la place :

$$\Omega = \llbracket 1, 10 \rrbracket \times \llbracket 1, 10 \rrbracket = \llbracket 1, 10 \rrbracket^2$$

La loi de probabilité associée à cet univers est la loi uniforme car le tirage au sort se fait de manière équiprobable.

- (b) L'évènement A : "Être au siège 1-6" est un évènement élémentaire donc :

$$P(A) = \frac{1}{100}.$$

- (c) On note B l'évènement "se trouver au siège n°1". Vu qu'il y a un siège n°1 sur les 10 tables, $\text{card}(B) = 10$ et donc

$$P(B) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$$

- (d) Il y a 25 filles mais seulement 10 tables. Il y aura donc forcément au moins une table avec au moins 3 filles à table. Ainsi, si C est l'évènement avoir 3 filles au moins à une même table alors

$$P(C) = 1.$$

Après tirage au sort, vous êtes à la table n°1, siège n°6.

2. **Répartition des prix.** Seul les 10 premiers joueurs recevront un lot (différent en fonction de leur classement). En admettant que chacun ait autant de chance de gagner, donner

- (a) On note E l'ensemble des joueurs. On tire alors 10 joueurs au hasard avec ordre (les lots sont donnés selon le classement) et sans remise (un joueur ne peut pas finir à deux places différentes). Le nombre de répartition des lots possible est donc un 10-arrangement de E .

$$\text{Il y a donc } A_{10}^{100} = \frac{100!}{90!} = 6.2 \times 10^{19} \text{ répartitions possible.}$$

- (b) On note A_k les évènements : "Finir à la k -ième place" pour $k \in \llbracket 1, 10 \rrbracket$ et on note l'évènement A : "Avoir un lot". On a donc

$$A = \bigcup_{k=1}^{10} A_k$$

Le nombre de répartition possible sachant que l'on finit à la k -ème place est le nombre de 9 arrangements (puisque l'on occupe une place gagnante) de l'ensemble des joueurs restant. Donc $\text{card}(A_k) = A_9^{99} = \frac{99!}{90!}$. Ainsi

$$\forall k \in \llbracket 1, 10 \rrbracket, \quad P(A_k) = \frac{99!}{90!} \times \frac{90!}{100!} = \frac{1}{100}$$

Or pour tout $k \in \llbracket 1, 10 \rrbracket$ $P(A_k)$ est constant. On obtient donc

$$P(A) = 10 \times \frac{1}{100} = \frac{1}{10}.$$

🌀 **Remarque :** On aurait pu obtenir ce résultat sans dénombrer toutes les possibilités de classement.

3. **Préflop** Vous recevez deux cartes face cachée (Comme on ne connaît pas les cartes des autres joueurs, on considère que ces 2 cartes sont tirées aléatoirement dans le paquet de 52 cartes). Soit E l'ensemble des cartes ($\#E = 52$). L'ensemble des résultats possibles Ω est l'ensemble des parties de E à deux éléments. Donc

$$\text{card}(\Omega) = \binom{52}{2} = \frac{52 \times 51}{2} = 26 \times 51$$

- (a) On note l'évènement A : "avoir $A \heartsuit A \spadesuit$ ". Comme on ne considère pas d'ordre dans cette modélisation,

$$\text{card}(A) = 1$$

Ainsi,

$$P(A) = \frac{1}{\binom{52}{2}} = \frac{1}{26 \times 51} \approx 0.00075$$

- (b) On note B l'évènement "avoir une paire d'As". Soit E_1 l'ensemble des As (avec $\#E_1 = 4$). B est l'ensemble des parties de E_1 à 2 éléments. On a donc $\text{card}(B) = \binom{4}{2} = 6$. Ainsi,

$$P(A) = \frac{6}{\binom{52}{2}} = \frac{6}{26 \times 51} = \frac{1}{13 \times 17} \approx 0,0045$$

- (c) On note B_k l'évènement "obtenir une paire de hauteur k (où l'on considère que les valets, dames, rois, ont respectivement pour hauteur 11, 12 et 13). Ainsi

$$B = \bigcup_{k=1}^1 3B_k$$

Les ensembles (B_1, \dots, B_{13}) sont deux à deux disjoints et pour tout $k \in \llbracket 1, 13 \rrbracket$, $P(B_k) = P(A)$
Donc

$$P(B) = \sum_{k=1}^{13} P(B_k) = 13 \times \frac{1}{13 \times 17} = \frac{1}{17} \approx 0,059$$

On reçoit $A\heartsuit Q\heartsuit$ (As et Dame de coeur).

4. **Flop** On tire les 3 cartes du flop visibles de tous (Attention, dans cette partie on sait qu'on ne peut pas tirer l'As de coeur ou la dame de coeur puisqu'on les a en main). On note E l'ensemble des 50 cartes restantes. L'ensemble des flops possibles Ω est l'ensemble des parties de E à 3 éléments. On a donc

$$\text{card}(\Omega) = \binom{50}{3} = \frac{50 \times 49 \times 48}{3 \times 2} = 50 \times 49 \times 8$$

- (a) On note A l'évènement "Obtenir 3 cartes de coeurs au flop". A est l'ensemble des parties de l'ensemble E_{\heartsuit} des coeurs restant ($\#E_{\heartsuit} = 11$). Ainsi

$$\text{card}(A) = \binom{11}{3} = \frac{11 \times 10 \times 9}{3 \times 2} = 11 \times 5 \times 3$$

Enfin

$$P(A) = \frac{\binom{11}{3}}{\binom{50}{3}} = \frac{11 \times 5 \times 3}{50 \times 49 \times 8} = \frac{33}{10 \times 49 \times 8} = \frac{33}{3920} \approx 0.0084$$

- (b) Pour obtenir un carré, il faut obtenir les 3 as restant ou les 3 dames restantes. On note C : "Obtenir un carré". On note A : "Obtenir les 3 As" et D : "Obtenir les 3 dames". On a

$$\text{card}(A) = \text{card}(D) = 1$$

Ainsi

$$P(C) = \frac{2}{\binom{50}{3}} = \frac{2}{50 \times 49 \times 8} = \frac{1}{50 \times 49 \times 4} \approx 0.00010.$$

Le flop tombe : $J\heartsuit - 2\spadesuit - 7\clubsuit$ (Valet de coeur, 2 de pique et 7 de trèfle) - Il reste donc 47 cartes dans le paquet. Nous n'avons aucune combinaison.

5. **Turn** On tirera une nouvelle carte visible de tous.

- (a) On note A l'évènement obtenir une paire sur le turn. Il reste 47 cartes en tout dans le paquet (donc $\#\Omega = 47$) et il reste 3 As, 3 Dames, 3 Valets, 3 sept, 3 deux soit 15 cartes qui nous intéresse. Donc

$$P(A) = \frac{5 \times 3}{47} = \frac{15}{47} \approx 0.32$$

- (b) On note B l'évènement "obtenir une couleur sur le turn" Comme nous disposons pour le moment de seulement 3 cartes de coeurs, il est impossible d'obtenir une couleur avec seulement une carte. Donc

$$P(B) = 0.$$

- (c) Pour obtenir une couleur en comptant la turn et la river, il faut obtenir un coeur sur le turn et sur la river. On note C l'évènement "On obtient une couleur à l'issue de la river" et les évènements C_1 "On tire un coeur sur le turn", C_2 "On tire un coeur sur la river". Ainsi $C = C_1 \cap C_2$. Les

événements C_1 et C_2 ne sont pas indépendants (pas de remise de cartes).

$$\begin{aligned}
 P(C) &= P(C_1 \cap C_2) \\
 &= P(C_1)P_{C_1}(C_2) \\
 &= \frac{10}{47} \times \frac{9}{46} \\
 &= \frac{45}{47 \times 23} \\
 &= \frac{45}{1081} \approx 0.042
 \end{aligned}$$

☞ **Remarque :** On aurait également pu considérer des arrangements.

La turn est un : $10\heartsuit$. Nous n'avons toujours pas de combinaison mais nous avons plusieurs possibilités selon la river

6. **River** On tire la dernière carte visible de tous.

(a) On note :

A : "Paire d'As ou de dames". $Card(A) = 6$ (3 as et 3 dames)

B : "Obtenir une couleur". $Card(B) = 9$ (9 cartes de cœurs)

C : "Obtenir une suite". $Card(B) = 4$ (4 Rois)

D : "Obtenir une suite couleur". $Card(D) = 1$ (Obtenir le roi de cœurs)

(b) Il ne reste plus que 46 cartes dans le paquet à tirer (ainsi $\#\Omega = 46$). Donc

$$P(A) = \frac{6}{46} \approx 0.13, \quad P(B) = \frac{9}{46} \approx 0.20$$

$$P(C) = \frac{4}{46} \approx 0.08, \quad P(D) = \frac{1}{46} \approx 0.02$$

☞ **Remarque :** Une règle du poker dit que pour connaître la probabilité qu'une combinaison que l'on souhaite arrive sur la river, il suffit de compter le nombre de cartes qui nous intéresse et le multiplier par 0,02. On observe que cette approximation est correcte lorsque les cartes qui nous intéressent ne sont pas trop nombreuses.

Exercice 6 - Étude de produit

1. (a) On a :

$$\begin{aligned}
 P_n &= (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\dots\left(1+\frac{1}{n}\right) = \prod_{k=1}^n \left(1+\frac{1}{k}\right) \\
 &= \prod_{k=1}^n \left(\frac{k+1}{k}\right) = \frac{\prod_{k=1}^n k+1}{\prod_{k=1}^n k} \\
 &= \frac{\prod_{i=2}^{n+1} i}{\prod_{k=1}^n k} \quad (\text{Changement d'indice } i=k+1) \\
 &= \frac{n+1}{1} = \boxed{n+1} \quad (\text{Par télescopage})
 \end{aligned}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on reconnaît que $Q_n = \ln(P_n)$:

$$\begin{aligned}
 \ln(P_n) &= \ln\left(\prod_{k=1}^n \left(1+\frac{1}{k}\right)\right) = \sum_{k=1}^n \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \quad (\text{car } \ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)) \\
 &= \boxed{Q_n}
 \end{aligned}$$

D'après la question précédente, on obtient pour tout entier $n \geq 1$:

$$\boxed{Q_n = \ln(1+n)}.$$

2. (a) On a :

$$\begin{aligned}
 R_n &= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \times \dots \times \frac{1}{1-\frac{1}{n}} = \prod_{k=2}^n \left(\frac{1}{1-\frac{1}{k}}\right) \\
 &= \prod_{k=2}^n \left(\frac{1}{\frac{k-1}{k}}\right) = \prod_{k=2}^n \left(\frac{k}{k-1}\right) = \left(\frac{\prod_{k=2}^n k}{\prod_{k=2}^n k-1}\right) \\
 &= \left(\frac{\prod_{k=2}^n k}{\prod_{i=1}^{n-1} i}\right) \quad (\text{Changement d'indice } i=k-1) \\
 &= \frac{n}{1} = \boxed{n} \quad (\text{Par télescopage})
 \end{aligned}$$

(b) De la même façon que précédemment, on reconnaît que $S_n = \ln(R_n)$:

$$\begin{aligned}
 \ln(R_n) &= \ln\left(\prod_{k=2}^n \left(\frac{1}{1-\frac{1}{k}}\right)\right) = \sum_{k=2}^n \ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{k}}\right) \quad (\text{car } \ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)) \\
 &= \boxed{S_n}
 \end{aligned}$$

D'après la question précédente, on obtient que pour tout entier $n \geq 2$:

$$\boxed{S_n = \ln(n)}.$$

3. Soit n un entier supérieur à 2, alors

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=2}^n \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^n \ln\left(\left(1 - \frac{1}{k}\right)\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right) \\ &= \sum_{k=2}^n \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) + \sum_{k=2}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \quad (\text{car } \ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)) \end{aligned}$$

Or d'après les questions précédentes :

$$\sum_{k=2}^n \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) = S_n = \ln(n)$$

et

$$\sum_{k=2}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = Q_n - Q_1 = \ln(1+n) - \ln(2). \quad (\text{Attention la somme par ici de } k=2)$$

On obtient finalement :

$$\boxed{T_n = \ln(n+1) + \ln(n) - \ln(2)}.$$

4. En passant à l'exponentielle dans l'expression précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} \exp(T_n) &= \exp\left(\sum_{k=2}^n \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)\right) \\ &= \prod_{k=2}^n \exp\left(\ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)\right) \quad (\text{car } e^{a+b} = e^a \times e^b) \\ &= \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \boxed{W_n} \end{aligned}$$

D'après la question précédente, on obtient que pour tout entier $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} W_n &= \exp(\ln(n+1) + \ln(n) - \ln(2)) = e^{\ln(n+1)} \times e^{\ln(n)} \times e^{-\ln(2)} \\ &= \boxed{\frac{n(n+1)}{2}}. \end{aligned}$$